Cocncursul Interjudețean de Matematică "Cristian S. Calude"
Ediția a XVIII-a
Proba pe echipe, clasele V-VI
22 noiembrie 2017

Soluții

Runda II

Problema 1.

Fie ***n*** un număr natural cu șapte cifre, care are prima cifră 3 și care are proprietatea că orice număr format cu două cifre consecutive ale lui ***n*** , în ordinea în care acestea apar în scrierea lui ***n,*** este divizibil fie cu 17, fie cu 23. Aflați numerele ***n*** cu proprietățile date, știind că ***n*** are 7 cifre.

Soluție:

Numerele care respectă cerințele problemei sunt de forma $\overline{3a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, unde
$\overline{3a_1},\ \overline{a_1a_2},\ \overline{a_2a_3},\ \overline{a_3a_4},\ \overline{a_4a_5},\ \overline{a_5a_6} \in M_{17} \cup M_{23}$.
Numerele de două cifre divizibile cu 17 sunt: 17,34,51,68,85.
Numerele de două cifre divizibile cu 23 sunt: 23,46,69,92.
Prin urmare, avem următoarele soluții posibile:
$\overline{3a_1} = 34;\ \overline{a_1a_2} = 46.$
Pentru $\overline{a_2a_3}$ avem două soluții posibile: $\overline{a_2a_3}$ =68 sau $\overline{a_2a_3}$ =69.
Astfel, obținem două soluții ***n*=3468517** sau **n=3469234.**

Problema 2.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră numerele $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)},\ T_n = S_1 \cdot S_2 \cdot .... \cdot S_n.$

Determinați numărul perechilor $(k,p), k, p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{S_k}{T_p} = 2018.$

Soluție:

$$S_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}.$$

$$T_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot .... \cdot \frac{p}{p+1} = \frac{1}{p+1}.$$

$$\frac{S_k}{T_p} = \frac{\frac{k}{k+1}}{\frac{1}{p+1}} = \frac{k(p+1)}{k+1} = 2018 \to k(p+1) = (k+1)\cdot 2018.$$

Cum $(k,k+1)=1 \to k \,/\, 2018$.
$2018 = 2\cdot 1009 \to 2018$ are 4 divizori deci numărul perechilor (k,p) este egal cu 4.

Problema 3.

Se dau semidreptele (OA, (OB, (OC, (OD, (OE și (OF în această ordine. Se știe că $m(\sphericalangle BOC)=10\cdot m(\sphericalangle AOB)$, $m(\sphericalangle DOE)=21\cdot m(\sphericalangle COD)$ și $m(\sphericalangle AOF)=45\cdot m(\sphericalangle EOF)$. Dacă măsurile unghiurilor formate sunt exprimate în grade prin numere naturale nenule, iar măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$ sunt exprimate în grade prin numere naturale prime, aflați măsura unghiului $\sphericalangle AOD$.

Soluție:

Notăm $m(\sphericalangle AOB)=n, m(\sphericalangle COD)=m, m(\sphericalangle EOF)=p,$ unde *m* și *n* sunt numere prime.

Cazul I: $m(\sphericalangle AOF)<180^\circ$. Avem n+10n+m+21m+p=45p $\leftrightarrow$ n+2m=4p.

Din 45*p*<180 $\rightarrow$ p<4.

$p=1\rightarrow n+2m=4$ imposibil

$p=2\rightarrow n+2m=8$ și atunci n=2, m=3 și $m(\sphericalangle AOD)=25^\circ$.

$p=3\rightarrow n+2m=12$ și atunci n=2, m=5 și $m(\sphericalangle AOD)=27^\circ$.

Cazul II: $m(\sphericalangle AOF)=180^\circ$. Avem n+10n+m+21m+p=45p=$180^\circ \rightarrow p=4$ si $n+2m=16$.

Atunci n=2, m=7 și $m(\sphericalangle AOD)=29^\circ$.

Cazul III: (OB și (OF sunt situate de o parte și de alta a dreptei OA.

$n+10n+m+21m+p+45p=360\leftrightarrow 11n+22m+46p=360\rightarrow n=par.$

$45p\le 180^0\rightarrow p\le 4.$

Dacă *p=1* $\rightarrow$11*n*+22*m*+1+45=360$\rightarrow$11*(n*+2*m*)=314- nu convine

Dacă *p=2* $\rightarrow$11*n*+22*m*+2+90=360$\rightarrow$11*(n*+2*m*)=268- nu convine

Dacă *p=3* $\rightarrow$11*n*+22*m*+3+135=360$\rightarrow$11*(n*+2*m*)=222- nu convine

Dacă *p=4* $\rightarrow$11*n*+22*m*+4+180=360$\rightarrow$11*n*+22*m*=176$\rightarrow$n=2, m=7 și $m(\sphericalangle AOD)=29^\circ$.

Prin urmare , $m(\sphericalangle AOD)\in\{25^\circ,27^\circ,29^\circ\}$.